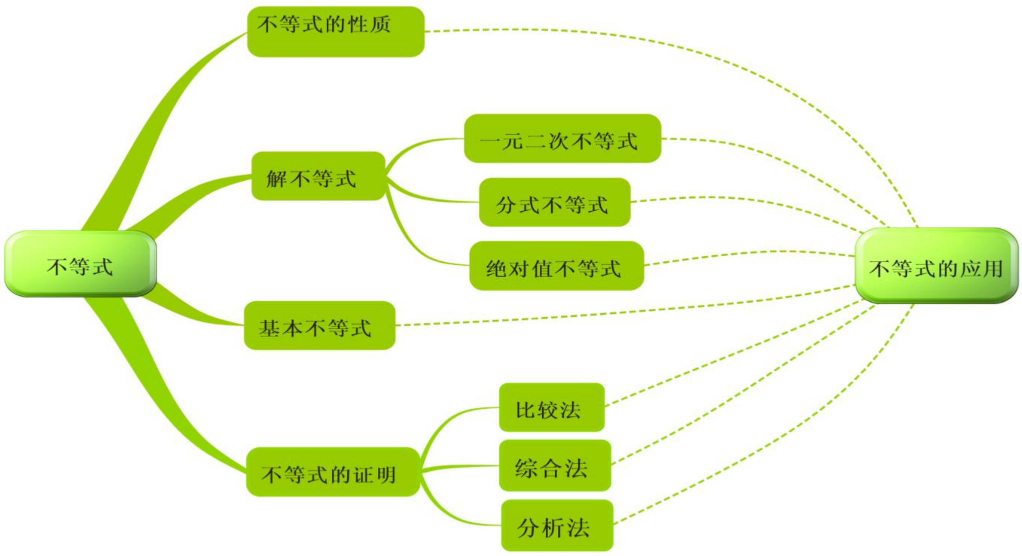
专题二　不等式

考点解读



1.不等式的性质

（1）实数的大小比较与实数运算性质之间的关系

$a>b \Leftrightarrow a-b>0$；$a<b \Leftrightarrow a-b<0$；$a=b \Leftrightarrow a-b=0$

（2）不等式的基本性质

性质 1.（传递性）如果 $a>b, b>c$，那么 $a>c$

性质 2.（加法性质）如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$

性质 3.（乘法性质）如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$；如果 $a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$

（3）从不等式的基本性质出发，还可以得到哪些有用的推论？

推论 1. 如果 $a>b, c>d$ 那么 $a+c>b+d$；　　推论 2. 如果 $a>b, c<d$ 那么 $a-c>b-d$

推论 3. 如果 $a>b>0, c>d>0$ 那么 $ac>bd$；　　推论 4. 如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

推论 5. 如果 $a>b>0, d>c>0$ 那么 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；　　推论 6. 如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n (n\in N^*)$

推论 7. 如果 $a>b>0$，那么 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ $(n\in N^*, n>1)$

（4）如何比较不等式的大小？

①作差法　②作商法

【总结】

不等式证明的常用方法：

（1）作差：作差后通过分解因式、配方等手段判断差的符号得出结果；

（2）作商（常用于分数指数幂的代数式）；

（3）分析法；

（4）平方法；

（5）分子（或分母）有理化；

（6）利用函数的单调性；

（7）寻找中间量或放缩法 ；

（8）图象法.

其中比较法（作差、作商）是最基本的方法.

2. 解不等式

（1）一元一次不等式的解集的讨论：

2.不等式的性质

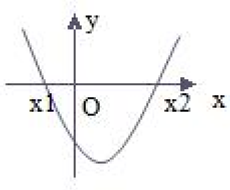
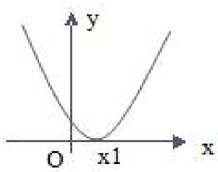
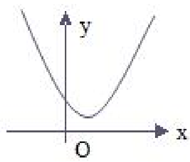
（1）不等式 $ax>b$ 的解集：

当 $a>0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x>\dfrac{b}{a}\}$；当 $a<0$ 时，解集为 $\{x\,|\,x<\dfrac{b}{a}\}$；

当 $a=0$ 且 $b<0$ 时，解集为 R；当 $a=0$ 且 $b\geq 0$ 时，解集为 $\varnothing$.

（2）一元二次不等式的解集的讨论：

一元二次不等式解集如表所示：（当方程方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个不相等的实根时，不妨设为 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$）

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图像			
$ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集	$\{x\|x<x_1或x>x_2\}$	$\left\{x\middle\|x\neq-\dfrac{b}{2a}\right\}$	R
$ax^2+bx+c<0$	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

$(a>0)$的解集			

【总结】

1、一元二次方程、一元二次不等式、二次函数间的联系：

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根即为一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集的端点值，也是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴的交点的横坐标.

2、解一元二次不等式的步骤：

（1）化标准：将不等式化成标准形式（右边为 0、最高次的系数为正）；

（2）考虑判别式：计算判别式的值，若值为正，则求出相应方程的两根；

（3）下结论：注意结果要写成集合或者区间的形式 .

记忆口诀： 大于取两边，小于取中间（前提 $a>0$）.

【拓展】一元二次方程根的分布理论：

1、方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 在 R 上有实数解，首先要讨论最高次项系数 a 是否为 0，其次，若 $a\neq 0$，则一定有 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$.

2、方程 $f(x)=ax^2+bx+c=0(a>0)$ 在 $(k,+\infty)$ 上有两根充要条件是

$\begin{cases}\Delta\geq 0\\ f(k)>0\\ -\dfrac{b}{2a}>k\end{cases}$；在 (m,n) 上有两根的充要条件是 $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ f(m)>0\\ f(n)>0\\ m<-\dfrac{b}{2a}<n\end{cases}$；在 $(-\infty,k)$ 和 $(k,+\infty)$ 上各有一根的充要条件分别是： $f(k)<0$.

若在闭区间 $[m,n]$ 讨论方程 $f(x)=0$ 有实数解的情况，可先利用在开区间 (m,n) 上实根分布的情况，得出结果，再令 $x=n$ 和 $x=m$ 检查端点的情况．当然也可以利用参变分离结合函数图像来做.

（3）分式不等式的解法

同解变形法（分式不等式 $\Leftrightarrow$ 整式不等式 $\Leftrightarrow$ 一次、二次不等式）

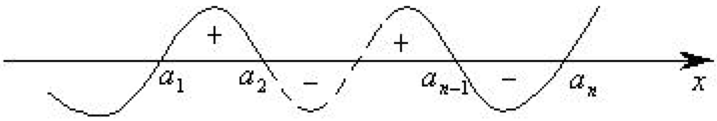
① $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$（或 $\dfrac{f(x)}{g(x)}<0$）与 $f(x)\cdot g(x)>0$ $\left(\text{或} f(x)\cdot g(x)<0\right)$ 同解；

② $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0\left(\text{或}\dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0\right)$ 与不等式组 $\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\geqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}\left(\text{或}\begin{cases}f(x)\cdot g(x)\leqslant 0\\ g(x)\neq 0\end{cases}\right)$ 同解.

（4）一元高次不等式的解法——标根法

其步骤是：（1）分解成若干个一次因式的积，并使每一个因式中最高次项的系数为正；（2）将每一个一次因式的根标在数轴上，从最大根的右上方依次通过每一点画曲线；并注意奇穿过偶弹回；（3）根据曲线显现 $f(x)$ 的符号变化规律，写出不等式的解集.

若 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，则不等式 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)>0$ 或 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)<0$ 的解法如下图（即"数轴标根法"）：



【提醒】
标根法主要用于简单的一元高次不等式题型，因为上海高考不作要求，可以简单的了解.

（5）绝对值不等式的解法

方法一：应用分类讨论思想去绝对值（最后结果应取各段的并集）；

方法二：应用数形结合思想；

方法三：应用化归思想等价转化.

①最简单的绝对值不等式的同解变形

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$,；$|ax+b|<c \Leftrightarrow -c<ax+b<c$,；

$|x|>a \Leftrightarrow x<-a$ 或 $x>a$,；$|ax+b|>c \Leftrightarrow ax+b<-c$ 或 $ax+b>c$,.

②关于绝对值不等式的常见类型有下列的同解变形

$|f(x)|\le g(x) \Leftrightarrow -g(x)\le f(x)\le g(x)$；

$|f(x)|\ge g(x) \Leftrightarrow f(x)\le -g(x)$ 或 $f(x)\ge g(x)$；

$|f(x)|\le |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)\le g^2(x)$.

【拓展】不等式的恒成立, 能成立, 恰成立等问题:

(1) 恒成立问题

若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恒成立, 则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min}>A$;

若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恒成立, 则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}<B$.

补充：不等式恒成立问题的常规处理方式：常应用函数方程思想和“分离变量法”转化为最值问题，也可抓住所给不等式的结构特征，利用数形结合法.

(2) 能成立问题

若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)>A$ 成立, 则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\max}>A$;

若在区间 D 上存在实数 x 使不等式 $f(x)<B$ 成立, 则等价于在区间 D 上 $f(x)_{\min}<B$.

(3) 恰成立问题

若不等式 $f(x)>A$ 在区间 D 上恰成立, 则等价于不等式 $f(x)>A$ 的解集为 D;

若不等式 $f(x)<B$ 在区间 D 上恰成立, 则等价于不等式 $f(x)<B$ 的解集为 D.

(5) 含参不等式的解法

求解的通法是“定义域为前提，函数增减性为基础，分类讨论是关键．”

【注意】

1、解完之后要写上：“综上，原不等式的解集是…”；

2、按参数讨论，最后应按参数取值分别说明其解集；但若按未知数讨论，最后应求并集；

3、解含有参数的不等式要注意对字母参数的讨论，如果遇到下述情况则一般需要讨论：

①不等式两端乘除一个含参数的式子时，则需讨论这个式子的正、负、零性；

②在求解过程中，需要使用指数函数、对数函数的单调性时，则需对它们的底数进行讨论；

③在解含有字母的一元二次不等式时，需要考虑相应的二次函数的开口方向，对应的一元二次方程根的状况（有时要分析 Δ），比较两个根的大小, 设根为 x_1,x_2（或更多）但含参数，要分 $x_1>x_2$、$x_1=x_2$、$x_1<x_2$ 讨论.

3.常用的基本不等式

(1) 如果 $a,b\in R$，那么 $a^2+b^2\geq 2ab$（当且仅当 $a=b$ 时等号成立）；

（2）如果$a,b\in R^{+}$，那么$\dfrac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$（当且仅当 a=b 时等号成立）.

【提醒】

基本不等式可以用来求最值，但要注意条件的满足：一正、二定、三相等；

如：若变数$a,b>0$，则若$ab=p$（常数），则当且仅当$a=b$时，$a+b$有最小值$2\sqrt{p}$；

若$a+b=s$（常数），当且仅当$a=b$时，ab有最大值$\dfrac{s^2}{4}$.

【拓展】

常用不等式有：

（1）当a、b为正数时，$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$（当且仅当$a=b$时取“=”号），即平方平均数≥算术平均数≥几何平均数≥调和平均数；

（2）糖水不等式：若$a>b>0,m>0$，则$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$（糖水的浓度问题）；

（3）绝对值不等式：$|a|-|b|\leq|a\pm b|\leq|a|+|b|$

4.不等式的证明

（1）比较法

①作差比较法

A.理论依据

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$

$a-b=0\Leftrightarrow a=b$

$a-b<0\Leftrightarrow a<b$

B.证明步骤：

I:作差：对要比较大小的两个数（或式）作差；

II：变形：对差进行因式分解或配方成几个数（或式）的完全平方和；

III：判断：结合变形的结果及题设条件判断差的符号.

【注意】

若两个正数作差比较有困难，可以通过它们的平方差来比较大小.

②作商比较法

A.理论依据

当a，$b\in R^{+}$时，$a>b\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}>1,a<b\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}<1,a=b\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}=1$.

B.证明步骤：I:判断（判断能否作商）；II：作商；III：变形；IV: 下结论.

（2）综合法

证题时，从已知条件入手，经过逐步的逻辑推导，运用已知的定义、定理、公式等，最终达到要

证结论，这是一种常用的方法（由因导果）．

（3）分析法

从要证明的结论出发，一步一步地推导，最后达到命题的已知条件（可明显成立的不等式、已知不等式等），其每一步的推导过程都必须可逆（执果索因）．

【注意】

（1）在具体处理问题时，常常是先用分析法分析，再用综合法证明，两种方法结合使用；

（2）如果采用分析法证明时，要注意书写的要求.

分析法可以叙述为：

欲证结论Q，需先证得P_1，

欲要证得P_1，需先证得P_2，

欲要证得P_2，需先证得P_3，

……………………………，

欲要证得P_{n-1}，需先证得P_n.

当P_n成立时，若以上步步可逆，则结论Q成立.

2.1 不等式的基本性质

例题精讲

例 1.（1） 设x、y是不全为零的实数，试比较$2x^2+y^2$与x^2+xy的大小；

（2） 设a,b,c为正数，且$a^2+b^2+c^2=1$，求证：$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\geq 3$.

例 2. 已知 $-4 \le a-c \le -1, -1 \le 4a-c \le 5$,试求 $9a-c$ 的取值范围.

过关演练

1. 若 $a>b>c$，则一定成立的不等式是（　　）

$A.\ a|c|>b|c|$　　　$B.\ ab>ac$　　　$C.\ a-|c|>b-|c|$　　　$D.\ \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

2. 已知：$a>b, e>f, c>0$，求证：$f-ac<e-bc$.

3. 已知 $-1<a<1$，比较 $1-a$ 和 $\dfrac{1}{1+a}$ 的大小.

4. 对于实数 a,b,c，给出下列命题：

①若$a>b$,则$ac^2>bc^2$；　　②若$ac^2>bc^2$,则$a>b$；

③若$a<b<0$,则$a^2>ab>b^2$；　　④若$a<b<0$,则$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$；

⑤若$a<b<0$,则$\dfrac{b}{a}>\dfrac{a}{b}$；　　⑥若$a<b<0$,则$|a|>|b|$；

⑦若$c>a>b>0$,则$\dfrac{a}{c-a}>\dfrac{b}{c-b}$；

其中正确的命题是_________.

5. 已知 $-1 \le x+y \le 1$，$1 \le x-y \le 3$，则 $3x-y$ 的取值范围是_________.

6. 若 $-1<\alpha<\beta<1$，则下面各式中成立的是（　　）

$A.\ -2<\alpha-\beta<0$　　　$B.\ -2<\alpha-\beta<-1$

$C.\ -1<\alpha-\beta<0$　　　$D.\ -1<\alpha-\beta<1$

7. 设 a 和 b 都是非零实数，求不等式 $a>b$ 和 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 同时成立的充要条件.

8. 下列几个不等式中

（1）$\dfrac{2a+b}{a+2b}>\dfrac{a}{b}$　（2）$\dfrac{b^2+1}{a^2+1}>\dfrac{b^2}{a^2}$　（3）$a+\dfrac{1}{a}>b+\dfrac{1}{b}$　（4）$a^a>a^b$

其中恒成立的不等式个数是（　）

$A.$ 0　　$B.1$　　$C.2$　　$D.3$

9. 若 $a<b<0$，则下列结论中正确的是　（　）

$A.$ 不等式 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 和 $\dfrac{1}{|a|}>\dfrac{1}{|b|}$ 均不成立

$B.$ 不等式 $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$ 和 $\dfrac{1}{|a|}>\dfrac{1}{|b|}$ 均不成立

$C.$ 不等式 $\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{a}$ 和 $(a+\dfrac{1}{b})^2>(b+\dfrac{1}{a})^2$ 均不成立

$D.$ 不等式 $\dfrac{1}{|a|}>\dfrac{1}{|b|}$ 和 $(a+\dfrac{1}{b})^2>(b+\dfrac{1}{a})^2$ 均不成立

10. 若二次函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，且 $1\le f(1)\le 2$，$3\le f(2)\le 4$，求 $f(3)$ 的范围.

11. 已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$，求 $\dfrac{c}{a}$ 的取值范围.

2.2 一元二次不等式的解法

例题精讲

例 1. 解关于 x 的不等式 $mx^2+(m-2)x-2>0$,并写出解集

例 2. 有一批影碟机(DVD)原售价为800元,在甲,乙两家商场均有销售,甲商场用如下方法促销,买一台单价为国为780元,买两台单价为760元,依此类推,每多买一台,则所买各台单价均减少20元,但每台最低不能低于440元,乙商场一律都按原价75%销售,某单位需购买一批此类影碟机,应去哪家商场购买?

过关演练

1. 若不等式 $2x^2-bx+a<0$ 的解集为 $\{x|1<x<5\}$，则 a 为________.

2. 求下列不等式的解集：

⑴解不等式 $-2x^2+3x+5>0$；⑵解不等式 $4x^2-4x+1>0$；⑶解不等式 $-x^2+2x-3>0$.

3.已知关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+1)<0$ 的解集是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$，求实数 a 的取值范围.

4. 解关于 x 的不等式 $x^2-(a+a^2)x+a^3>0$.

5. 关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $(-1,2)$ ，则不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为________.

6. 已知关于 x 的不等式组 $1\le kx^2+2x+k\le 2$ 有唯一实数解，则实数 k 的取值集合是________.

7. 对于任意实数 x ，不等式 $ax^2+2ax-(a+2)<0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是（　　）

$A.\ -1\le a\le 0$　　　　$B.\ -1\le a<0$

$C.\ -1<a\le 0$　　　　$D.\ -1<a<0$

8. a 为实数，关于 x 的二次方程 $7x^2-(a+13)x+2a+2=0$ 有两个实数根分别介于 0 与 1 之间以及 1 与 2 之间，求 a 的取值范围.

9. 解不等式: $(x-2)(ax-2)>0$.

10. 如果集合 $A=\{x\,|\,ax^2-ax+1<0\}=\varnothing$ ，则实数 a 的取值范围是_________.

11. a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 均为非零实数，不等式 $a_1x^2+b_1x+c_1>0$ 和 $a_2x^2+b_2x+c_2>0$ 的解集分别为集合 M 和 N，那么“$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$”是“$M=N$”的（　　）

$A.$ 充分非必要条件　　　　$B.$ 必要非充分条件

$C.$ 充要条件　　　　$D.$ 既非充分又非必要条件

12. 函数 $f\left(x\right)=(a-2)x^2+2(a-2)x-4$，若 $x\in\left(1,3\right)$ 时，$f\left(x\right)<mx-7$ 恰成立，求 a,m 的值.

13. 关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+1=0$ 在区间 $\left(0,2\right)$ 上有实根，求实数 m 的取值范围.

14. 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $\left|m\right|\le 2$ 的所有 m 都成立，求 x 的取值范围.

15. 某公园举办雕塑展览吸引着四方宾客，旅游人数 x 与人均消费 t（元）的关系如下：

$$x=\begin{cases}-12t+1600 & (10\le t\le 50, t\in\mathbf{N})\\ -6t+1300 & (50<t\le 200, t\in\mathbf{N})\end{cases},$$

（1）若游客客源充足，那么当天接待游客多少人时，公园的旅游收入最多？

（2）若公园每天运营成本为 5 万元（不含工作人员的工资），还要上缴占旅游收入 20%的税收，其余自负盈亏．目前公园的工作人员维持在 40 人．要使工作人员平均每人每天的工资不低于 100 元，并维持每天正常运营（不负债），每天的游客人数应控制在怎样的合理范围内？（注：旅游收入=旅游人数×人均消费）

2.3 其他不等式的解法

例题精讲

例 1. k 为何值时，下式恒成立：$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$

例 2. 解不等式 $\left|\dfrac{x-2}{2x}-\dfrac{1}{2}\right|<0.1$

例 3. 若不等式 $m\le\left(|x+1|+|x-1|\right)$ 的解集为全集，求实数 m 的求值范围.

过关演练

1. 若 $x\in R$，则 $\left(1-|x|\right)\left(1+x\right)>0$ 的解集是（　　）

$A.\ \left\{x\middle|0\le x<1\right\}$　$B.\ \{x|x<0$ 且 $x\ne-1\}$　$C.\ \left\{x\middle|-1<x<1\right\}$　$D.\ \{x|x<1$ 且 $x\ne-1\}$

2. 不等式 $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}>0$ 的解集为（　　）

$A.\ \left\{x\middle|x<-2或x>3\right\}$　$B.\ \left\{x\middle|x<-2或1<x<3\right\}$

$C.\ \left\{x\middle|-2<x<1或x>3\right\}$　$D.\ \left\{x\middle|-2<x<1或1<x<3\right\}$

3. 求下列不等式的解集：

⑴解不等式$\left|4x-3\right|>2x+1$；

⑵解不等式$\left|\dfrac{x}{x+2}\right|>\dfrac{x}{x+2}$；

⑶解不等式$4<|2x-3|\le 7$；

⑷解不等式$\left|x-1\right|>\left|2x-3\right|$；

⑸解不等式$\left|x-1\right|+\left|x+2\right|<5$．

4. 若不等式$|3x+2|\ge|2x+a|$对$x\in R$恒成立，求实数a的取值范围．

5. 解关于x的不等式：$mx+4<m^2+2x$．

6. 不等式$\left|x^2-4\right|<x+2$的解集为_________．

7. 已知关于x的不等式$\left|x-2\right|+3-x<m$的解集为非空集合，则实数m的取值范围是（　　）

$A.\ \ m<1$　　　$B.\ m\le 1$　　　$C.\ m>1$　　　$D.\ m\ge 1$

8. 若不等式$\dfrac{x-m+1}{x-2m}<0$成立的一个充分非必要条件是$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，则实数$m$的取值范围是（　　）

$A.\ \left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]\cup\left[\dfrac{4}{3},+\infty\right)$　　$B.\ \left[\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{3}\right]$　　$C.\ \left[\dfrac{1}{6},\dfrac{3}{2}\right]$　　$D.$ 以上结论都不对

9. 已知关于x的不等式$\dfrac{x+1}{x+a}<2$的解集为P，若$1\notin P$，则实数a的取值范围为（　　）

$A.\ (-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$　　$B.\ [-1,0]$　　$C.\ (-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$　　$D.\ (-1,0]$

10. 设全集$U=R$，解关于x的不等式：$\left|x-1\right|+a-1>0\ \left(x\in R\right)$.

11. 解不等式$(x-1)(x+2)^2\geq 0$.

12. 设关于x的不等式$|x^2-4x+m|\leq x+4$的解集为A，且$0\in A,2\notin A$，则实数m的取值范围是________.

13. 不等式组$\begin{cases}x>0\\ \dfrac{3-x}{3+x}>\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right|\end{cases}$的解集是（　　）

$A.\ \{x\,|\,0<x<2\}$　　$B.\ \{x\,|\,0<x<2.5\}$

$C.\ \{x\,|\,0<x<\sqrt{6}\}$　　$D.\ \{x\,|\,0<x<3\}$

14. 对任何实数x，若不等式$\left|x+1\right|-\left|x-2\right|>k$恒成立，则实数$k$的取值范围为（　　）

$A.\ k<3$　　$B.\ k<-3$　　$C.\ k\leq 3$　　$D.\ \ k\leq -3$

15. 解不等式$\sqrt{2x^2-6x+4}<x+2$.

16. 解关于x的不等式$\dfrac{a(x-1)}{x-2}>1(a\neq 1)$.

17. 已知关于x的不等式$\dfrac{ax-5}{x^2-a}<0$的解集为M.

(1) 当$a=1$时，求集合M；

(2) 当$3\in M$且$5\notin M$时,求实数a的范围.

2.4 基本不等式及其应用

例题精讲

例 1. 已知 $x<\frac{5}{4}$，求 $x+\frac{1}{4x-5}$ 的最大值.

例 2. 求 $y=\frac{x^2+7x+10}{x+1}(x>-1)$ 的最小值.

例 3. 某村计划建造一个室内面积为 $800m^2$ 的矩形蔬菜温室，在温室内，沿左右两侧与后侧内墙各保留 $1m$ 宽的通道，沿前侧内墙保留 $3m$ 宽的空地，当矩形室的变长各为多少时，蔬菜的种植面积最大，最大种植面积时多少？

过关演练

1. 已知 $x>3$，则 $x+1+\frac{1}{2x-6}$ 的最小值是________.

2. 已知 $a,b\in R^+$，$ab=9$，则 $a+b$ 的最小值是________.

3. 下列不等式一定成立的是 (　　)

$A.\ x+y\geq 2\sqrt{xy}$　　　　$B.\ x+\dfrac{1}{x}\geq 2$

$C.\ x^2+y^2\geq 2xy$　　　　$D.\ \dfrac{x+y}{2xy}\geq \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

4. 已知 $a,b,c\in R$, 求证 $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$.

5. 为了提高产品的年产量，某企业拟在 2017 年进行技术改革．经调查测算，产品当年的产量 x 万件与投入技术改革费用 m 万元(m ≥0)满足 $x=3-\dfrac{k}{m+1}$ (k 为常数)．如果不搞技术改革，则该产品当年的产量只能是 1 万件．已知 2017 年生产该产品的固定投入为 8 万元，每生产 1 万件该产品需要再投入 16 万元．由于市场行情较好，厂家生产的产品均能销售出去．厂家将每件产品的销售价格定为每件产品生产成本的 1.5 倍(生产成本包括固定投入和再投入两部分资金)．

(1)将 2017 年该产品的利润 y 万元(利润＝销售金额－生产成本－技术改革费用)表示为技术改革费用 m 万元的函数；

(2)该企业 2017 年的技术改革费用投入多少万元时，厂家的利润最大？

6. 已知 $x>0,y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{y}=1$，则 $x+y$ 的最小值为________.

7. 已知 $a>0,b>0$，以下三个结论：① $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\dfrac{a+b}{2}$，② $\dfrac{a+b}{2}\leq\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$，

③ $\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}\geq a+b$，其中正确的个数是(　　)

$A.$ 0　　　　$B.$ 1　　　　$C.$ 2　　　　$D.$

8. 已知 a,b 为正实数，$2b+ab+a=30$，求函数 $y=\frac{1}{ab}$ 的最小值.

9. 已知关于 x 的不等式 $2x+\frac{2}{x-a}\geq 7$ 在 $x\in\left(a,+\infty\right)$ 上恒成立，求实数 a 的最小值.

10. 某单位用木料制作如图所示的框架，框架的下部是边长分别为 x、y（单位：m）的矩形，上部是等腰直角三角形，要求框架围成的总面积为 8 m^2，问 x、y 分别为多少时用料最省？（精确到 0.001m）

11. 已知 $x>0, y>1$，且 $x(y-1)=2$， 则 $2x+y$ 的最小值为________.

12. $x,y,z\in R^*, x-2y+3z=0, \frac{y^2}{xz}$ 的最小值为________.

13. $x,y>0, x+y=1$，且 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq a$ 恒成立, 则 a 的最小值为（　　）

$A.\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　$B.2\sqrt{2}$　　　　$C.2$　　　　$D.\sqrt{2}$

14. 已知 a、b、$c\in\left(0,+\infty\right)$ 且 $a+b+c=1$，求证：$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right)\geq 8$.

15. 三个同学对问题"关于 x 的不等式 $x^2+25+\left|x^3-5x^2\right|\geq ax$ 在[1，12]上恒成立，求实数 a 的取值范围"提出各自的解题思路.

甲说："只须不等式左边的最小值不小于右边的最大值".

乙说："把不等式变形为左边含变量 x 的函数，右边仅含常数，求函数的最值".

丙说："把不等式两边看成关于 x 的函数，作出函数图像".

参考上述解题思路，你认为他们所讨论的问题的正确结论，求出 a 的取值范围.

2.5 不等式的证明

例题精讲

例 1. 设 $a,b\in R$, 求证：$a^2+b^2+ab+1>a+b$.

例 2. 已知 $a>0,b>0$，求证：$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\geq a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

过关演练

1. 求证：（1）$x(x+2)<(x+1)^2$；

（2）设 $a>b>0$，求证：$a^a b^b>a^b b^a$.

2. 已知 $a+b+c=0$，求证：$ab+bc+ca\leq 0$.

3. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

4. 已知 a,b,m 都是正数，并且 $a<b$，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

5. 设 $a,b,x,y\in R$, 且 $a^2+b^2=1,x^2+y^2=1$, 试证：$|ax+by|\leq 1$.

6. 实数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx=-1$,求证：$x^2+5y^2+8z^2\geq 4$.

7. 已知正数a、b、c满足$a+b<2c$，求证：$c-\sqrt{c^2-ab}<a<c+\sqrt{c^2-ab}$.

8. 设$a>0$，$b>0$，求证：$\left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{b^2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\ge a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$.

9. 已知a、b、c为正实数，$a+b+c=1$.

求证：(1) $a^2+b^2+c^2\ge\frac{1}{3}$；

(2) $\sqrt{3a+2}+\sqrt{3b+2}+\sqrt{3c+2}\le 6$.

10. 若$x,y>0$,且$x+y>2$，求证：$\frac{1+y}{x}$和$\frac{1+x}{y}$中至少有一个小于 2.

11. 证明不等式$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\quad\left(n\in N^*\right)$.